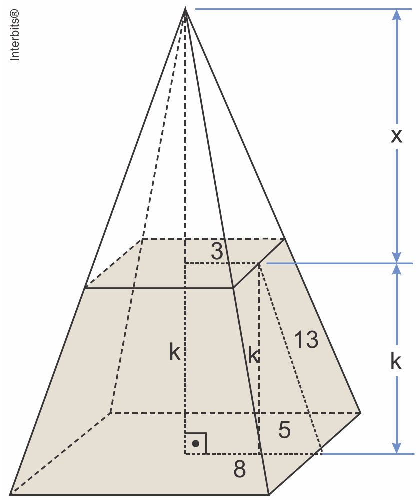
Gabarito:

Resposta da questão 1:
ANULADA

Questão anulada no gabarito oficial.

Esta questão foi anulada, pois no enunciado não foi discriminado o polígono das bases do tronco de pirâmide. Resolveremos a questão, considerando suas bases quadradas.



Através do teorema de Pitágoras podemos encontrar o valor de k:

$k^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow k^2 = 144 \Rightarrow k = 12\text{m}$

Considerando semelhança de Pirâmides, temos:

$\dfrac{x}{x+12} = \dfrac{3}{8} \Rightarrow 8x = 3x + 36 \Rightarrow 5x = 36 \Rightarrow x = 7,2$

O volume V do tronco é a diferença entre o volume da pirâmide maior e o volume da pirâmide menor:

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 16^2 \cdot (12 + 7,2) - \dfrac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 7,2 \Rightarrow V = 1552\text{m}^3 = 1.552.000\ \text{L}$

Resposta da questão 2:
[C]

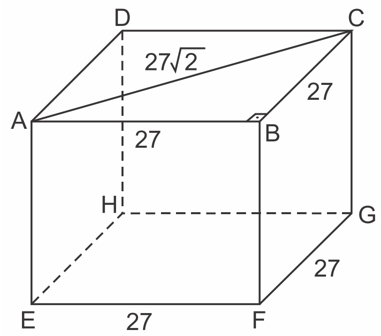
Sendo x, em cm, a medida da aresta do cubo cujo volume é igual a $19.683\ \text{cm}^3$, tem-se que:

$x^3 = 19683$

$x^3 = 27^3$

$x = 27\ \text{cm}$

Daí, o cubo que gerou o objeto de decoração, é o cubo abaixo:

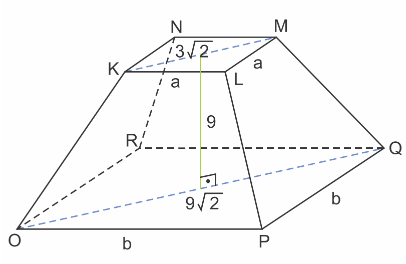


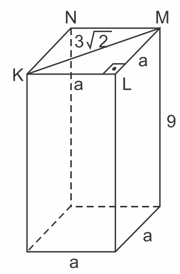
No triângulo ABC,

$(AC)^2 = 27^2 + 27^2$

$AC = 27\sqrt{2}\ \text{cm}$

Vamos analisar o tronco e o paralelepípedo reto-retângulo abaixo.





No triângulo KLM, segue que:

$(3\sqrt{2})^2 = a^2 + a^2$

$2a^2 = 18$

$a = 3\ \text{cm}$

Assim, o volume do paralelepípedo é:

$V_{\text{paralelepípedo}} = 3^2 \cdot 9 = 81\,\text{cm}^3$

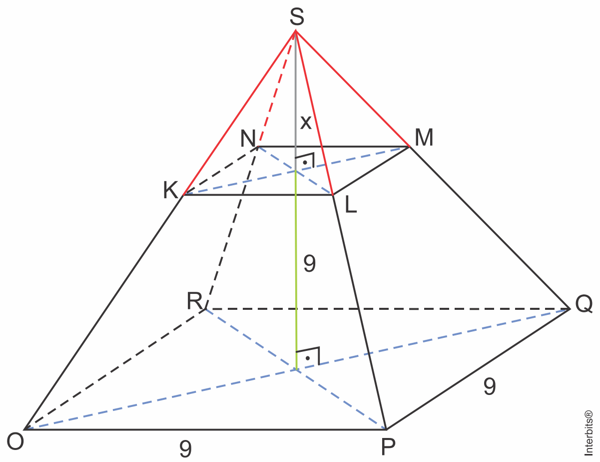
No triângulo OPQ, segue que:

$(9\sqrt{2})^2 = b^2 + b^2$

$81 \cdot 2 = 2b^2$

$b = 9\ \text{cm}$

O tronco foi gerado pela seguinte pirâmide:



Os triângulos SKM e SOQ são semelhantes, logo,

$$\frac{x}{x+9} = \frac{3\sqrt{2}}{9\sqrt{2}}$$
$$\frac{x}{x+9} = \frac{1}{3}$$
$$3x = x+9$$
$$x = \frac{9}{2}$$

Então, o volume do tronco é dado por:

$$V_{tronco} = \frac{1}{3}\cdot 9^2 \cdot \left(9+\frac{9}{2}\right) - \frac{1}{3}\cdot 3^2 \cdot \frac{9}{2}$$
$$V_{tronco} = \frac{729}{2} - \frac{27}{2}$$
$$V_{tronco} = 351\,cm^3$$

Portanto, o volume do sólido retirado é:

$$V_{sólido\ retirado} = 2\cdot V_{tronco} + V_{paralelepípedo}$$
$$V_{sólido\ retirado} = 2\cdot 351 + 81$$
$$V_{sólido\ retirado} = 783\ cm^3$$

Finalmente, o volume do objeto de decoração é dado por V, onde V é igual a:

$$V = 19683 - 783$$
$$V = 18900\ cm^3$$
$$18900 \in \left]18.400, 19.000\right]$$

Resposta da questão 3:
01 + 04 + 08 + 16 = 29.

Seja L a medida da aresta da base de P_1. Logo, sabendo que a diagonal da base de P_1 mede $12\ cm$, temos

$$12 = L\sqrt{2} \Leftrightarrow L = 6\sqrt{2}\,cm.$$

Ademais, se k é a razão de semelhança entre P_1 e P_2, então

$$k = \frac{6\sqrt{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = 4.$$

[01] Verdadeira. Seja g a medida da aresta lateral de P_2. Assim, vem

$$\frac{10}{g} = 4 \Leftrightarrow g = \frac{5}{2}cm < \frac{6}{2} = 3\,cm.$$

[02] Falsa. Desde que o raio do círculo circunscrito à base de P_1 mede $\frac{12}{2} = 6m$ e a aresta lateral mede $10\ cm$, podemos concluir, pela semelhança com o triângulo retângulo de lados $3\,cm$, $4\,cm$ e $5\,cm$, que a altura de P_1 mede $8\,cm$.

Em consequência, se h é a medida da altura de P_2, temos

$$\frac{8}{h} = 4 \Leftrightarrow h = 2\,cm.$$

Portanto, a altura de T mede $8-2=6\,cm$ e, assim, a razão entre a altura de P_1 e a altura de T é igual a

$$\frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

[04] Verdadeira. Sejam V e v, respectivamente, as medidas dos volumes de P_1 e de P_2. Logo, vem

$$\frac{V}{v} = k^3 \Leftrightarrow v = \frac{V}{64}.$$

Por conseguinte, se V_T é o volume de T, então

$$\begin{aligned} V_T &= V - v \\ &= \frac{63}{64}\cdot\frac{1}{3}\cdot(6\sqrt{2})^2\cdot 8 \\ &= 189\,cm^3. \end{aligned}$$

[08] Verdadeira. De fato, conforme [04].

[16] Verdadeira. Com efeito, pois

$$v = \frac{1}{64}\cdot V = \frac{1}{64}\cdot\frac{1}{3}\cdot(6\sqrt{2})^2\cdot 8 = 3\,cm^3.$$

Resposta da questão 4:
[B]

$$\frac{V_M}{V_m} = \left(\frac{H}{h}\right)^3 \Rightarrow \frac{V_M}{\frac{8}{27}V_M} = \left(\frac{21}{h}\right)^3 \Rightarrow \frac{27}{8} = \left(\frac{21}{h}\right)^3 \Rightarrow \frac{21}{h} = \frac{3}{2} \Rightarrow h = 14$$

Portanto, a distância solicitada é:

$d = H - h \Rightarrow d = 21 - 14 \Rightarrow d = 7$ (Número primo)

Resposta da questão 5:
a) Seja ℓ a aresta da base ABCD. Como o perímetro da base ABCD mede 36 cm, segue que

$$4\ell = 36 \Leftrightarrow \ell = 9\text{ m}.$$

Logo, a área da base ABCD é dada por:

$$(ABCD) = \ell^2 = 9^2 = 81\text{cm}^2.$$

Portanto, como as pirâmides VABCD e $VA'B'C'D'$ são semelhantes, temos que:

$$\frac{(A'B'C'D')}{(ABCD)} = \left(\frac{\frac{2}{3}h}{h}\right)^2 \Leftrightarrow (A'B'C'D') = 81 \cdot \frac{4}{9} = 36\text{ cm}^2.$$

b) Se o volume da pirâmide VABCD é igual a 324cm^3, então:

$$324 = \frac{1}{3} \cdot 81 \cdot h \Leftrightarrow h = 12\text{ cm}.$$

Desse modo, a altura do tronco de pirâmide é:

$$h - \frac{2}{3}h = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4\text{cm}.$$

Além disso,

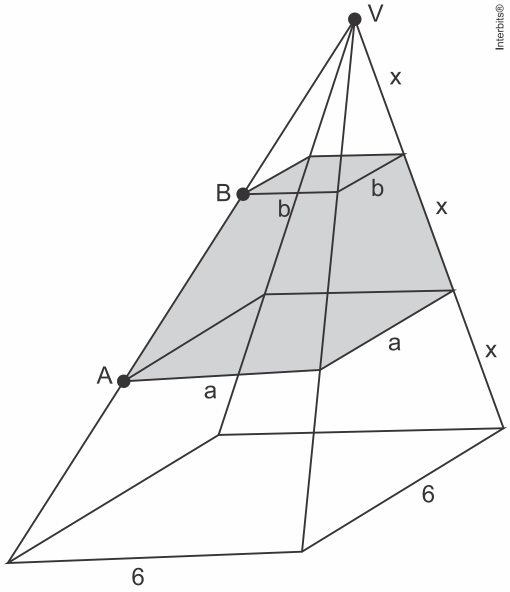
$$\frac{[VA'B'C'D']}{[VABCD]} = \left(\frac{\frac{2}{3}h}{h}\right)^3 \Leftrightarrow [VA'B'C'D'] = \frac{8}{27}[VABCD].$$

Portanto, o volume do tronco é dado por:

$$\begin{aligned}[VABCD] - [VA'B'C'D'] &= [VABCD] - \frac{8}{27}[VABCD] \\ &= \frac{19}{27}[VABCD] \\ &= \frac{19}{27} \cdot 324 \\ &= 228\text{cm}^3.\end{aligned}$$

Resposta da questão 6:
[C]

Calculando:



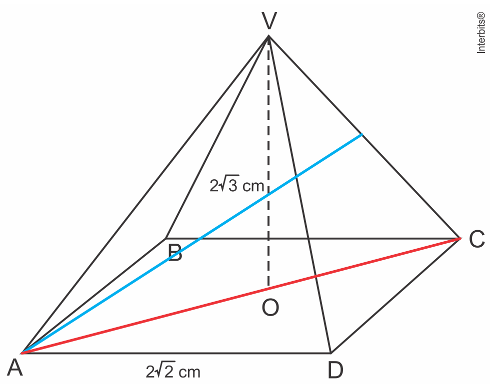
$$\frac{x}{3x} = \frac{b}{6} \Rightarrow 3b = 6 \Rightarrow b = 2$$
$$\frac{V_1}{108} = \left(\frac{2}{6}\right)^3 \Rightarrow V_1 = 108 \cdot \left(\frac{8}{216}\right) \Rightarrow V_1 = 4\text{ cm}^3$$

$$\frac{2x}{3x} = \frac{a}{6} \Rightarrow 3b = 12 \Rightarrow a = 4$$
$$\frac{V_2}{108} = \left(\frac{4}{6}\right)^3 \Rightarrow V_2 = 108 \cdot \left(\frac{64}{216}\right) \Rightarrow V_2 = 32\text{ cm}^3$$

$$V_{hachura} = 32 - 4 = 28\text{ cm}^3$$

Resposta da questão 7:
[B]

Com os dados do enunciado, pode-se desenhar:



Analisando o triângulo VOC, pode-se escrever:

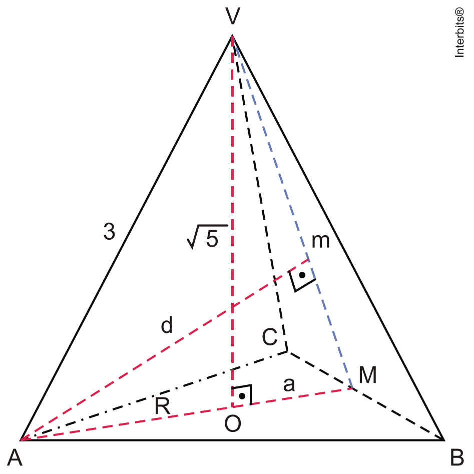
$$\overline{VC}^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{\left(2\sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2 = 12 + 4 \Rightarrow \overline{VC} = 4$$

Como o segmento $\overline{AC}$ também é igual a 4, conclui-se que o triângulo ACV é equilátero. Assim, a distância do ponto A à aresta lateral $\overline{VC}$ é igual a altura h de um triângulo equilátero de lado 4 (segmento azul da figura).

Logo,

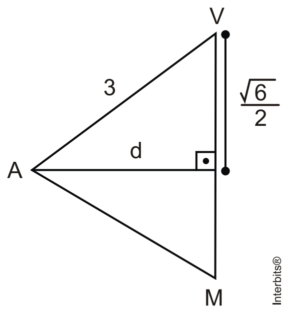
$$h = \frac{4\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2\sqrt{3}$$

Resposta da questão 8:
[A]



No triângulo VOM: $R^2 + \sqrt{5}^2 = 3^2 \Rightarrow R = \sqrt{4} \Rightarrow R = 2$ e a = 1

No triângulo VOM: $m^2 = \sqrt{5}^2 + 1^2 \Rightarrow m = \sqrt{6}$



O triângulo AMV é isósceles de base VM (AM = AV = 3)

Logo, $d^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = 3^2 \Rightarrow d = \sqrt{9 - \frac{6}{4}} \Rightarrow d = \frac{\sqrt{30}}{2}$